МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ КАК ОСНОВА ПОСТРОЕНИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

М. В. Бержинская [2], Ю.М. Голубинский[2], А. А. Данилов[1,2]

[1] Пензенский ЦСМ; Россия, г. Пенза, ул. Комсомольская, 20; *aa-dan@mail.ru*

[2] Пензенский государственный университет; Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40; *mberj@mail.ru*

Резюме: В статье предлагается метод построения калибровочных характеристик функций нескольких аргументов с помощью коэффициентов чувствительности. Проводится сопоставление оценок коэффициентов чувствительности методом множественного регрессионного анализа и методом наименьших квадратов на плоскости.

Ключевые слова: калибровочная характеристика, коэффициенты чувствительности, рабочие условия эксплуатации, средства измерений.

1. Постановка задачи.

В последнее время все большее значение приобретает проведение калибровки в рабочих условиях эксплуатации средств измерений (СИ). Это вызвано стремлением владельцев получить калибровочную характеристику СИ в реальных условиях их применения [1].

Кроме того, целесообразность калибровки в рабочих условиях эксплуатации СИ связана с рядом причин, описанных в [1, 2]. К ним относятся:

- отсутствие затрат (временных и финансовых) на транспортировку СИ к месту калибровки и обратно;
- простой СИ в ожидании очереди калибровки.

При этом необходимо убедиться в работоспособности эталона в рабочих условиях эксплуатации СИ, а также учитывать, что неопределенность измерений в рабочих условиях эксплуатации СИ, как правило, превышает неопределенность измерений в нормальных условиях [2].

Однако, условия эксплуатации СИ могут отличаться от условий, в которых проведена его калибровка. Поэтому необходимо провести калибровку в нескольких точках диапазона измерений СИ и в нескольких точках диапазона изменений влияющих величин, чтобы затем распространить имеющуюся характеристику на весь диапазон измерений СИ и область рабочих условий его эксплуатации.

2. Методы определения коэффициентов чувствительности калибровочной характеристики

Калибровочная характеристика СИ может быть задана в табличной, графической или аналитической форме. На результат калибровки оказывают влияние условия, уникально сложившиеся в момент проведения измерений, показателей точности применяемого эталона, а также неопределенности измерений.

Предположим, что проведена калибровка СИ в нескольких точках его диапазона измерений. При этом величина, воспроизводимая калибратором (используемым в качестве рабочего эталона), подлежала прямым многократным измерениям в k точках диапазона измерений с числом измерений l в каждой точке. Результаты эксперимента представлены в таблице 1, в последнем столбце которой приведены средние значения результатов измерений в i-й проверяемой точке диапазона измерений СИ.

Таблица 1. Результаты эксперимента

Значение входной величины	Номер измерения				Среднее значение результатов измерений
	1	2	…	l	
x_1	y_{11}	y_{12}	…	y_{1l}	$\bar{y}_1$
x_2	y_{21}	y_{22}	…	y_{2l}	$\bar{y}_2$
…	…	…	…	…	…
x_k	y_{k1}	y_{k2}	…	y_{kl}	$\bar{y}_k$

Калибровочная характеристика СИ может быть представлена в виде:

$$y(x;\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_m) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \\ + \dots + a_nx^n + \sum_{j=1}^{m} b_j\alpha_j, \quad (1)$$

где y – результат измерений;

x – значение входной величины x;

$a_0 \dots a_n$ и $b_1 \dots b_m$ – коэффициенты чувствительности калибровочной характеристики.

α_j – значения влияющих величин.

Задача состоит в определении коэффициентов чувствительности калибровочной характеристики. Это позволит оценить результат калибровки в произвольной точке диапазона измерений СИ при произвольном сочетании значений влияющих величин, уникально сложившихся в момент калибровки.

Для определения коэффициентов чувствительности воспользуемся методом многомерного регрессионного анализа (ММРА) [3, 4].

Не снижая общности, аппроксимируем калибровочную характеристику полиномом второго порядка и выберем в качестве влияющего фактора лишь температуру, т.к. ее изменение оказывает наиболее значимое влияние на результат измерений.

Оценим минимум суммы квадратов «невязок» S:

$$S = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\left[\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + b\theta_j\right) - \\ -\bar{y}_i\right]^2, \quad (2)$$

где θ_j - значение температуры в момент калибровки.

Вычислим частные производные по каждому из коэффициентов влияния:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \\ +b\theta_j\right) - \bar{y}_i\right], \quad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \\ +b\theta_j\right) - \bar{y}_i\right] \cdot x_i, \quad (4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \\ +b\theta_j\right) - \bar{y}_i\right] \cdot x_i^2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \\ +b\theta_j\right) - \bar{y}_i\right] \cdot \theta_j. \quad (6)$$

Приравняв производные к нулю, получим систему уравнений: Систему будем решать методом Крамера. Для этого вычислим определители *D*, D_1, D_2, D_3, *D4*:

$$\begin{cases} kpa_0 + pa_1\sum_{i=1}^{k}x_i + pa_2\sum_{i=1}^{k}x_i^2 + kb\sum_{j=1}^{p}\vartheta_j = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\overline{y_{ij}} \\ pa_0\sum_{i=1}^{k}x_i + pa_1\sum_{i=1}^{k}x_i^2 + pa_2\sum_{i=1}^{k}x_i^3 + b\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\vartheta_j \cdot x_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}x_i \cdot \overline{y_{ij}} \\ pa_0\sum_{i=1}^{k}x_i^2 + pa_1\sum_{i=1}^{k}x_i^3 + pa_2\sum_{i=1}^{k}x_i^4 + b\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\vartheta_j \cdot x_i^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}x_i^2 \cdot \overline{y_{ij}} \\ ka_0\sum_{j=1}^{k}\vartheta_j + a_1\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\vartheta_j \cdot x_i + a_2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\vartheta_j \cdot x_i^2 + kb\sum_{j=1}^{p}\vartheta_j^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\vartheta_j \cdot \overline{y_{ij}} \end{cases} \quad (7)$$

$$D=\begin{vmatrix} k\cdot p & p\sum_{i=1}^{k}x_i & p\sum_{i=1}^{k}x_i^2 & k\sum_{j=1}^{p}\theta_j \\ p\sum_{i=1}^{k}x_i & p\sum_{i=1}^{k}x_i^2 & p\sum_{i=1}^{k}x_i^3 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i \\ p\sum_{i=1}^{k}x_i^2 & p\sum_{i=1}^{k}x_i^3 & p\sum_{i=1}^{k}x_i^4 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i^2 \\ k\sum_{j=1}^{p}\theta_j & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i^2 & k\sum_{j=1}^{p}\theta_j^2 \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\overline{y_{ij}} & p\sum_{i=1}^{k}x_i & p\sum_{i=1}^{k}x_i^2 & k\sum_{j=1}^{p}\theta_j \\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}x_i\cdot\overline{y_{ij}} & p\sum_{i=1}^{k}x_i^2 & p\sum_{i=1}^{k}x_i^3 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i \\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}x_i^2\cdot\overline{y_{ij}} & p\sum_{i=1}^{k}x_i^3 & p\sum_{i=1}^{k}x_i^4 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\cdot\overline{y_{ij}} & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i^2 & k\sum_{j=1}^{p}\theta_j^2 \end{vmatrix} \tag{9}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} k\cdot p & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\overline{y_{ij}} & p\sum_{i=1}^{k}x_i^2 & k\sum_{j=1}^{p}\theta_j \\ p\sum_{i=1}^{k}x_i & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}x_i\cdot\overline{y_{ij}} & p\sum_{i=1}^{k}x_i^3 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i \\ p\sum_{i=1}^{k}x_i^2 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}x_i^2\cdot\overline{y_{ij}} & p\sum_{i=1}^{k}x_i^4 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i^2 \\ k\sum_{j=1}^{p}\theta_j & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\cdot\overline{y_{ij}} & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\,x_i^2 & k\sum_{j=1}^{p}\theta_j^2 \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$D_3=\begin{vmatrix} k\cdot p & p\sum_{i=1}^{k} x_i & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\overline{y_{ij}} & k\sum_{j=1}^{p}\theta_j \\ p\sum_{i=1}^{k} x_i & p\sum_{i=1}^{k} x_i^2 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} x_i\cdot\overline{y_{ij}} & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\, x_i \\ p\sum_{i=1}^{k} x_i^2 & p\sum_{i=1}^{k} x_i^3 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} x_i^2\cdot\overline{y_{ij}} & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\, x_i^2 \\ k\sum_{j=1}^{p}\theta_j & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\, x_i & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\cdot\overline{y_{ij}} & k\sum_{j=1}^{p}\theta_j^2 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

$$D_4=\begin{vmatrix} k\cdot p & p\sum_{i=1}^{k} x_i & p\sum_{i=1}^{k} x_i^2 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\overline{y_{ij}} \\ p\sum_{i=1}^{k} x_i & p\sum_{i=1}^{k} x_i^2 & p\sum_{i=1}^{k} x_i^3 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} x_i\cdot\overline{y_{ij}} \\ p\sum_{i=1}^{k} x_i^2 & p\sum_{i=1}^{k} x_i^3 & p\sum_{i=1}^{k} x_i^4 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} x_i^2\cdot\overline{y_{ij}} \\ k\sum_{j=1}^{p}\theta_j & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\, x_i & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\, x_i^2 & \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\theta_j\cdot\overline{y_{ij}} \end{vmatrix} \qquad (12)$$

В результате вычисления определителей получим выражения для коэффициентов чувствительности:

$$a_0 = \frac{D_1}{D},\quad a_1 = \frac{D_2}{D},$$

$$a_2 = \frac{D_3}{D},\quad a_1 = \frac{D_4}{D}, \qquad (13)$$

Указанная процедура достаточно трудоемка. Проверим, возможно ли уменьшить порядок определителя за счет раздельного определения коэффициентов чувствительности a_i и b_j ? Для этого проведем два активных эксперимента:

первый – по определению коэффициентов калибровочной характеристики при фиксированном (произвольном) значении влияющей величины;

второй – по определению коэффициентов влияния влияющей величины при фиксированном значении входной величины.

При этом коэффициенты калибровочной характеристики могут быть найдены методом наименьших квадратов [5] вычислением определителя 3 порядка.

Коэффициент влияния температуры может быть найден из выражений:

$$b_i = \frac{y_p - y_1}{\theta_p - \theta_1}, \qquad (14)$$

где θ_1 и θ_p - значения влияющей величины в начале и в конце диапазона ее изменения;

y_1 и y_p - значения выходной величины y при фиксированном (произвольном) значении входной величины в начале и в конце диапазона изменения влияющей величины соответственно.

Очевидно, при активном эксперименте для

определения коэффициентов $\{a_n\}$ калибровочной характеристики целесообразно проводить измерения в k точках диапазона изменения входной величины x_i, а для определения коэффициента влияния – в двух точках: в начале и в конце диапазона изменения влияющей величины при фиксированном (произвольном) значении входной величины.

Таким образом, при пассивном эксперименте необходимо проводить измерения в $k \cdot p$ точках, при активном число точек может быть сокращено до $k+2$.

3. Оценивание адекватности модели

С целью оценивания адекватности результатов, полученных в ходе активного эксперимента, было проведено моделирование в среде Microsoft Excel.

Модель строилась в предположении, что выполнялась калибровка портативного калибратора в следующих пяти точках его диапазона воспроизведения: 4, 8, 12, 16 и 20 мА для трех значений температуры окружающей среды (0, 23 и 50 °С) с помощью климатической камеры.

Предположим в модели наличие следующих составляющих погрешности:

- аддитивной (коэффициент a_0);
- мультипликативной, определяемой коэффициентом a_1;
- нелинейности, описываемой коэффициентом a_2;
- дополнительной, вызванной влиянием температуры (коэффициент b).

Случайные погрешности могут быть минимизированы за счет проведения многократных измерений. За результат измерений будем принимать среднее арифметическое значение результатов многократных измерений.

Тогда модель калибровочной характеристики будет иметь вид:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + b(\theta - \theta_0), \qquad (15)$$

где θ_0 - температура градуировки.

Коэффициенты a_0, a_1, a_2 будут вычисляться по известным формулам методом наименьших квадратов, коэффициент b по формуле (14).

4. Выводы

По итогам моделирования проводилось сравнение значений y, рассчитанных по формуле (15) с заданными. При этом коэффициенты чувствительности определялись двумя способами: первый – в результате применения метода многомерного регрессионного анализа – по формулам (8) – (13); второй – при нахождении коэффициентов a_0, a_1, a_2 методом наименьших квадратов для температуры градуировки и нахождении коэффициента b по формуле (14).

Полученные значения коэффициентов для одной из реализаций сведены в таблицу 2.

Таблица 2. Результаты моделирования

Коэффициенты	Заданные значения	ММРА	МНК (при 23 ºС, 12 мА)
a_0	-0,03000	-0,02979	-0,02856
a_1	0,00100	0,00100	0,00075
a_2	0,00400	0,00400	0,00401
b	-0,00035	-0,000345	-0,000358

В таблице 3 приведены максимальные отклонения калибровочных характеристик от заданных для двух способов при различных фиксированных значениях температуры.

Таблица 3. Максимальные отклонения калибровочных характеристик от заданной, мкА

ММРА	МНК		
	0 ºС	23 ºС	50 ºС
0,3	0,5	0,7	0,9

Анализ таблицы 3 показывает, что отклонение расчетной калибровочной характеристики, построенной методом наименьших квадратов на плоскости, несколько превышает отклонение расчетной характеристики по методу ММРА. Активный эксперимент по определению коэффициентов $\{a_n\}$ целесообразно проводить в области нормальных значений влияющих величин, при этом отклонение расчетной калибровочной характеристики от заданной не превышает 0,01%.

Исходя из критерия ничтожной погрешности [6], метод наименьших квадратов на плоскости может быть признан удовлетворительным для определения коэффициентов чувствительности калибровочной характеристики. Этот метод позволит уменьшить число измерений, что сократит время калибровки и сэкономит ресурсы.

5. Литература

[1] **М.В. Бержинская, А.А. Данилов, Ю.В. Кучеренко, Н.П. Ординарцева.** О калибровке средств измерений в рабочих условиях эксплуатации *Сборник докладов 23-го Национального*

научного симпозиума с международным участием "Метрология и Метрологическое Обеспечение 2013", 9-13 Сентября 2013 г., Созополь, ТУ – София, Болгария 2013, ISSN 1313-9126, с.443-447.

[2] **М.В. Бержинская, А.А. Данилов, Ю.В. Кучеренко, Н.П. Ординарцева.** Калибровка средств измерений в рабочих условиях, *Метрология* №1, (2014), ISSN 0132-47-13, 19-22 с.

[3] **Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий.** *Эконометрика*. Дело, Москва, 2004, ISBN 978-5-7749-0459-4, 576 с.

[4] **А.Л. Померанцев.** *Хемометрика в Excel.* ТПУ, Томск, 2014, ISBN 978-5-4387-0374-7, 435 с.

[5] **МИ 2175-91 ГСИ.** *Градуировочные характеристики средств измерений. Методы построения. Оценивание погрешностей.*

[6] **И.А. Зограф, П.В. Новицкий.** *Оценка погрешностей результатов измерений.* Энергоатомиздат, Ленинград, 1991, ISBN 5-283-04513-7, 304 с.

Данные для авторов:

[2] **Марина Викторовна Бержинская,** кандидат технических наук (2010), докторант, доцент кафедры «Информационно-измерительная техника и метрология» Пензенского государственного университета, Россия

Научные интересы: Метрологическая надежность средств измерений, оценивание неопределенности

[2] **Юрий Митрофанович,** Голубинский, кандидат технических наук (1988), заместитель заведующего кафедрой «Информационно-измерительная техника и метрология» Пензенского государственного университета, Россия

Научные интересы: общая теория измерений

[1), 2] **Александр Александрович Данилов,** доктор технических наук (2002), профессор (2004), заместитель директора ФБУ «Пензенский ЦСМ» 1), профессор кафедры «Информационно-измерительная техника и метрология» Пензенского государственного университета2), Россия

Научные интересы: Метрологическое обеспечение измерительных систем, методы повышения точности средств измерений, оценивание неопределенности, метрологическая надежность средств измерений

IDENTIFICATION METHODS FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES AS THE BASIS OF CONSTRUCTION CALIBRATION CHARACTERISTICS OF MEASURING INSTRUMENTS

M.V. Berzhinskaya [2], Yu.M Golubinskiy [2], A.A. Danilov [1,2]

[1] Penza Center for Standardization, Metrology and Certificaion; Russia, Penza, St. Komsomolskaya, 20; *aa-dan@mail.ru*

[2] Penza state university; Russia, Penza, St. Krasnaya, 40; *mberj@mail.ru*

Summary: In this paper we propose a method for constructing the calibration characteristics of functions of several arguments with the help of the sensitivity coefficients. A comparison estimates sensitivity coefficients by multiple regression analysis and the method of least squares on the plane.

Keywords: calibration characteristic, sensitivity coefficients, rated operating conditions, measuring instruments.

References

[1] **M.V. Berzhinskaya, A.A. Danilov, Yu.V. Kucherenko, N.P. Ordinartseva.** O kalibrovke sredstv izmereniy v rabochih usloviyah ekspluatatsii. Sbornik dokladov 23 go Natsionalnogo nauchnogo simpoziuma s mezhdunarodnyim uchastiem "Metrologiya i Metrologicheskoe Obespechenie 2013", 9-13 Centyabrya 2013 g., Sozopol, TU – Sofiya, Bolgariya 2013, ISSN 1313-9126, s.443-447.

[2] **M.V. Berzhinskaya, A.A. Danilov, Yu.V. Kucherenko, N.P. Ordinartseva.** Kalibrovka sredstv izmereniy v rabochih usloviyah, Metrologiya №1, (2014), ISSN 0132-47-13, 19-22 s.

[3] **Ya.R. Magnus, P.K. Katyishev, A.A. Peresetskiy.** Ekonometrika. Delo, Moskva, 2004, ISBN 978-5-7749-0459-4, 576 s.
[4] **A.L. Pomerantsev.** Hemometrika v Excel. TPU, Tomsk, 2014, ISBN 978-5-4387-0374-7, 435 s.
[5] **MI 2175-91 GSI.** Graduirovochnyie harakteristiki sredstv izmereniy. Metodyi postroeniya. Otsenivanie pogreshnostey.
[6] **I.A. Zograf, P.V. Novitskiy.** Otsenka pogreshnostey rezultatov izmereniy. Energoatomizdat, Leningrad, 1991, ISBN 5-283-04513-7, 304 s.

МЕТОДИ ЗА ИДЕНТИФИКАЦИЯ НА ФУНКЦИИТЕ НА НЯКОЛКО АРГУМЕНТИ КАТО ОСНОВА ЗА ИЗГРАЖДАНЕ НА КАЛИБРОВЪЧНИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА СРЕДСТВАТА ЗА ИЗМЕРВАНЕ

М. В. Бержинская [2], Ю.М. Голубинский[2], А. А. Данилов[1,2]
[1] Пенза център по стандартизация и метрология; Русия, Пенза, ул. Комсомолская, 20; *aa-dan@mail.ru*
[2] Пенза държавен университет; Русия, Пенза, ул. Красная, 40; *mberj@mail.ru*

Резюме: В статията се предлага метод за определяне на калибровъчни характеристики на функциите на няколко аргументи, с помощта на коефициенти на чувствителност. Прави се съпоставка на оценките на коефициентите за чувствителност по метода на множествен регресивен анализ и метода на най-малките квадрати на повърхността.

Ключови думи: характеристика на калибриране, коефициенти на чувствителност, условия на експлоатация при работа, средства за измерване.